ARGUMENTACIÓN EN ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA. PARTE II

Ana María Narvaez[1]; Noemí Sonia Vega[1]; Juan Ernesto Calderón[1]

[1]Grupo IEMI, Departamento de Ciencias Básicas de la Ingeniería, Facultad Regional Mendoza, UTN/ana.narvaez@frm.utn.edu.ar

Resumen: Esta investigación estudia la capacidad lógico matemática de argumentación en Álgebra y Geometría Analítica, para contribuir a las competencias de egreso de los estudiantes de Ingeniería de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional, según el nuevo paradigma del Modelo de Formación por Competencias con el Aprendizaje Centrado en el Estudiante de Ingeniería. Se privilegia como marco teórico el análisis sobre el razonamiento de Raymond Duval. La metodología empleada es cuali-cuantitativa sobre las producciones de los alumnos realizadas en la evaluación global para obtener la promoción en la asignatura en 2023 y el primer examen final posterior al primer semestre de cursado 2024. Entre las conclusiones obtenidas, se destaca que no se debería dejar de evaluar la capacidad de argumentación en Álgebra y Geometría Analítica, pues de acuerdo con reconocidos especialistas, la matemática es una ciencia que permite desarrollar una serie de competencias en los estudiantes, que, entre otras cosas, les permitirá vivificar sus pensamientos de manera ingeniosa y creativa. La habilidad de argumentación permite impulsar y robustecer la formulación de conjeturas, explicaciones, etc. y, de esta forma, explorar caminos alternativos de solución y discusión sobre la pertinencia de conclusiones, propias de las carreras de Ingeniería.

Palabras claves: Argumentación. Capacidades lógico – matemáticas. Álgebra Lineal y Geometría

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de Educación Matemática investiga la capacidad lógico matemática de argumentación, en Álgebra y Geometría Analítica, para contribuir a las competencias de egreso de los estudiantes de ingeniería de la Facultad Regional Mendoza de la Universidad Tecnológica Nacional, según el nuevo paradigma del Modelo de Formación por Competencias con el Aprendizaje Centrado en el Estudiante de Ingeniería (Consejo Federal de Decanos de Ingeniería, 2018).

Según Ríos-Cuesta (2021), diversos estudios han comentado la importancia de la argumentación en la construcción de conocimiento matemático y las implicaciones en el desarrollo de competencias. Algunos trabajos han centrado su mirada en el análisis de la actividad discursiva en el aula en torno a la construcción individual y colectiva de argumentos válidos. Otros, en cambio, en la cognición que desarrollan los estudiantes en las interacciones en clase y tratan de acercarlos a los procesos de prueba mediante la presentación de argumentos deductivos. Sin embargo, son diversas las posturas sobre lo que se entiende como argumentación, al punto que algunos conciben la prueba como una forma particular de argumentación. En esta línea está inmerso el presente trabajo, en el que se presenta un estudio sobre la justificación de proposiciones que realizan de forma escrita los estudiantes, como parte de las actividades propuestas en dos evaluaciones, para obtener la aprobación de la asignatura Álgebra y Geometría Analítica.

La argumentación es una de las habilidades básica de los individuos en general y, aporta de manera significativa en los procesos de enseñanza y aprendizaje de los estudiantes, permitiéndoles ser protagonistas de su propio aprendizaje, de tal manera que éste pueda "…fortalecer su desarrollo intelectual, lograr conocimientos sólidos y armarlos para la búsqueda de los nuevos conocimientos" (Rivera Pérez & Ruíz Vela, 2006). Además, esta habilidad se considera fundamental en las matemáticas, ya que a través de ella se pueden comunicar los resultados en un lenguaje matemático, dilucidar los mecanismos, transmitir y consolidar conceptos a partir de juicios inductivos. Por lo tanto, esta capacidad permite a los estudiantes indagar, relacionar y comunicar las razones que justifican la solidez de un juicio.

Siguiendo a Duval (2004), argumentación y explicación comparten el esquema básico de paso de una premisa a una conclusión, pero se diferencian en las razones que validan este paso, siendo en la argumentación donde las razones comunican su fuerza a las afirmaciones, convirtiéndolas en argumentos y haciendo de la proposición final una conclusión, mientras que en la explicación las razones tienen una función descriptiva al presentar el sistema de relaciones en las que el dato a explicar se produce. Por ejemplo, tomando como premisa la existencia de distintas clasificaciones de triángulos basadas en sus tipos de lados y en sus tipos de ángulos, en una explicación afirmamos que los triángulos equiláteros son distintos a los triángulos rectángulos, ya que un triángulo equilátero es un triángulo cuyos tres lados tienen la misma medida, mientras que un triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus tres ángulos recto, es decir que mide 90º. En una argumentación, en cambio, decimos que los triángulos equiláteros son distintos a los triángulos rectángulos ya que no puede haber un triángulo que sea equilátero y rectángulo a la vez, dado que en un triángulo rectángulo se cumple el Teorema de Pitágoras, que relaciona sus tres lados *a*, *b* y *c* según la ecuación $a^2+b^2 = c^2$ (siendo *c* el lado opuesto al ángulo recto, es decir, la hipotenusa) y es imposible que esta ecuación se cumpla si los tres lados son iguales, $a = b = c$, salvo en el caso en que valgan cero.

Desde una perspectiva más formal para la caracterización de la argumentación, resulta útil el esquema argumentativo mínimo de Plantin (1998), que consiste en el paso de una premisa a una conclusión esgrimiendo al menos una razón que lo valide (ley de paso). Una vez establecida esta unidad mínima, se debería contar con un marco más general que contemple otras casuísticas en el discurso argumentativo. En este esquema, las premisas son los hechos que se invocan para justificar y validar la afirmación y la tesis; la conclusión es la tesis que se establece; la ley de paso son las razones que se proponen para justificar las conexiones entre datos y conclusión; la garantía es el conocimiento básico que asegura la justificación.

En el caso de la argumentación en matemáticas, se dispone de una red bien establecida de definiciones, lemas, proposiciones y teoremas que permiten avanzar en los razonamientos mediante la regla de implicación, en la que el paso de las premisas a la conclusión se hace mediante un término medio que relaciona y justifica las proposiciones, haciéndose necesario un uso correcto del conocimiento matemático como término medio. En resumen, definimos la argumentación matemática como aquel tipo de argumentación que se desarrolla dentro de la actividad matemática y en la que la ley de paso se apoya en elementos del conocimiento matemático, requiriéndose la capacidad de comprender o de producir una relación de justificación entre proposiciones que sea de naturaleza deductiva y no sólo semántica.

La argumentación en Matemática es estudiada desde la antigua Grecia. La gran aportación de los matemáticos griegos fue transformar el saber empírico de civilizaciones anteriores, como la mesopotámica o la egipcia, en una matemática teórica, es decir, en un saber que prueba o demuestra sus construcciones por deducción a partir de un conjunto de axiomas, postulados y definiciones. Ese proceso se inicia con Tales de Mileto y Pitágoras de Samos, tiene un punto álgido en la Academia de Platón y alcanza su forma estándar con los Elementos de Euclides de Alejandría. Los números y las figuras serán considerados como entidades ideales independientes de aquello a lo que remiten: las cosas concretas o figuradas. Esa idealización implica un camino de lo concreto a lo abstracto, de la percepción visual a la comprensión racional.

DESARROLLO

El enfoque metodológico de investigación que se emplea en este proyecto es cuali-cuantitativo, es decir, se analiza y comprende la producción de los estudiantes, buscando significado a sus respuestas. Se tomarán una serie de datos no estandarizados y el diseño de investigación es un estudio de casos, pues éste se enfoca en analizar de forma detallada una unidad holística para responder al planteamiento del problema, demostrar supuestos y desarrollar teorías. En base a esto, se pretende estudiar la peculiaridad o diferencias de los argumentos emergentes con los estudiantes al resolver una actividad en Álgebra y Geometría Analítica. Se toma este método con el fin de hacer un análisis lo más completo posible con la producción de los estudiantes.

PRIMER ESTUDIO

La población para esta investigación son los estudiantes de primer año, primer semestre que rindieron voluntariamente la evaluación global para promocionar la asignatura, en 2023; son 148 estudiantes. La muestra se tomó de manera intencional.

El instrumento para recoger los datos ha sido la actividad 1 de la evaluación global, que está compuesta de 5 proposiciones. La actividad mencionada tiene un enunciado con 4 incisos: a), b), c) y d); se presentó a los estudiantes en una misma sesión de clase de 90 minutos en junio de 2023. Apenas se dieron explicaciones excepto para clarificar cuándo tendrían la nota de la evaluación e informar brevemente sobre el procedimiento a seguir durante la sesión. La recolección de datos fue de carácter no anónimo y se pidió información personal, pues era una evaluación institucional para promocionar la asignatura.

Los datos de nuestra investigación son las representaciones escritas de las respuestas individuales de los alumnos, futuros ingenieros. No hay construcción de razonamientos por medio de réplicas sucesivas, como ocurre con la argumentación en situación de interacción, sino que estamos ante el tipo “argumentación para uno mismo” tal como lo describen Perelman y Olbrechts-Tyteca (1994), o bien “monólogo argumentativo” en términos de Plantin (1998).

La ejercitación solicitada en la evaluación global se diseñó a partir de actividades similares dadas en el cursado y, teniendo en cuenta las recomendaciones del profesor responsable del aula universitaria. En cuanto a contenidos y procesos requeridos, las cuatro proposiciones tienen un carácter marcadamente distinto, entre ellas, con el fin de obtener respuestas variadas y ver la calidad de las argumentaciones, como índice de aprendizaje logrado. Intencionadamente se pidió la justificación de las respuestas, ya que se pensó que esto podría ayudar a que las respuestas de los estudiantes proporcionaran más datos sobre qué entienden y qué no entienden. Somos conscientes de que el propio formato de la evaluación con la secuencia cerrada de preguntas-respuestas puede haber contribuido a que los estudiantes centren la atención en la elaboración de respuestas y no tanto en la descripción detallada de los procesos de razonamiento desarrollados. Diversos estudios (ver, por ejemplo, León y Calderón, 2001) señalan que en situaciones de escritura abunda más la representación matemática escueta que la narración discursiva extensa.

El análisis cualitativo de los datos se ha organizado en torno a la lectura repetida de las respuestas de los estudiantes a la pregunta de acuerdo con los principios metodológicos de la Teoría Fundamentada (Páramo Morales, 2015), y se ha complementado con la triangulación de perspectivas de los autores. Ha habido un primer análisis de cada evaluación, con la lectura vertical de todas las respuestas y, a continuación, un segundo análisis de cada pregunta, con la lectura horizontal del conjunto de la totalidad de las respuestas a cada una de las preguntas. En este artículo, mencionamos resultados obtenidos con el segundo análisis, que en cierta medida toma en consideración aspectos del análisis previo pormenorizado para cada estudiante.

Para recolectar los datos cuantitativos se realizó una rúbrica con 5 niveles para cuantificar la capacidad argumentación: no contesta o sin respuesta, contesta mal o respuesta incorrecta, contesta en forma insuficiente o respuesta insuficiente; contesta en forma casi correcta o respuesta casi correcta y contesta correctamente o respuesta correcta.

Como se ha expresado anteriormente, se eligió la evaluación global 2023 a la que se presentaron alumnos de las 5 carreras de la Facultad Regional Mendoza, Universidad Tecnológica Nacional (Química, Electrónica, Electromecánica, Civil e Ingeniería en Sistemas de Información) voluntariamente, para promocionar el espacio curricular (aprobaron evaluaciones parciales con un mínimo de 60% sobre 100%). Esta es la etapa más avanzada del curso porque incluye la evaluación del programa completo del espacio curricular. Se trata de un total de 148 evaluaciones de alumnos que ya han terminado el cursado. La actividad observada tiene el siguiente enunciado:

Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas. Justificar la respuesta.

a) *Un punto que pertenece a la cónica de ecuación* $9x^2 + 4y^2 - 18x - 36 = 0$ *es* $C(1,0)$.

b) *Si AX=B es un sistema compatible determinado, entonces A es una matriz equivalente por filas a la matriz Identidad.*

c) *Si A y B son dos matrices de orden y de rango n, entonces* A^{-1} *es semejante a* B^{-1}.

d) *El núcleo de una transformación lineal es un subespacio del dominio.*

El análisis a priori sobre las cuatro proposiciones dadas en la actividad, indica que, siendo las tres primeras proposiciones falsas, se esperaba una respuesta correcta mayoritariamente, por ser más sencillo, en general, argumentar con contraejemplos, lo que es realizado habitualmente en clases de la asignatura. El primer inciso es una proposición en torno a contenidos geométricos básicos que se espera que los estudiantes resuelvan sin mayor dificultad y que debe informar sobre la argumentación en geometría. La proposición b) se refiere a un tema central del espacio curricular, enunciado en el primer resultado de aprendizaje de la planificación. La consigna del inciso c) está relacionada con una clásica propiedad de semejanza de matrices y se esperaba que reconocieran la falta de una hipótesis (o premisa) en el antecedente de la implicación para que fuera verdadera, esta alternativa era una posibilidad, otro camino para la respuesta justificada de los estudiantes, era que propusieran un contraejemplo.

La última proposición, verdadera, se esperaba que la argumentaran con la demostración directa estándar, que es analizada y fundamentada siempre, tanto en clases presenciales, como de consultas presenciales y virtuales. La demostración a que se hace referencia aparece en la literatura básica de un curso de Álgebra Lineal, por ejemplo, Kolman (2006), Lay (2017), Grossman (1996), Noble (1989), entre otros. Los resultados cuantitativos obtenidos, en función de la rúbrica diseñada, se presentan.

Tabla 1

Rúbrica de evaluación de la actividad estudiada

It.	Sin respuesta	Respuesta incorrecta	Respuesta insuficiente	Respuesta casi correcta	Respuesta correcta
a	18	55	5	5	65
b	16	89	6	6	31
c	34	74	7	6	27
d	27	65	26	20	10

La totalidad de las respuestas casi correctas más las correctas son aproximadamente el 28%. Hay un 15,7% de exámenes sin respuesta en la totalidad de las 4 proposiciones solicitadas, siendo la demostración de la proposición d) la que menos realizaron los estudiantes. La proposición a) se podía justificar, entre otras alternativas, con un proceso calculatorio y fue bien argumentada en un 44% aproximadamente. La argumentación de la proposición b) que se refiere a un concepto troncal en álgebra lineal y, obviamente presente en resultados de aprendizaje de la planificación de la asignatura, fue mal realizada por aproximadamente el 62,23% del alumnado.

La justificación de la proposición c) que requería identificar la falsedad del enunciado por no contener la totalidad de las premisas que conducirían a la respuesta verdadera (como una alternativa posible de justificación), también se podía justificar con un contraejemplo; fue incorrecta en aproximadamente el 50%. Con respecto a la proposición d), la argumentación requiere de una demostración clásica; fue realizada en forma casi correcta y correcta en aproximadamente un 20%. Cabe destacar que el concepto involucrado en dicha proposición, se evalúa siempre.

SEGUNDO ESTUDIO

Se analiza la actividad número 1 del examen final de Álgebra y Geometría Analítica del 31 de julio de 2024, que fue rendida por 102 alumnos de las 5 carreras de Ingeniería, en las mismas condiciones que el primer estudio. La actividad es la siguiente:

Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Si la proposición es verdadera, demuéstrela, en caso contrario justifique o proponga un contraejemplo.

a) *Una matriz y su transpuesta tienen los mismos valores propios.*

b) *Si {u, v, w} es linealmente dependiente, entonces u y v son paralelos.*

c) *El plano de ecuación $x - 2y + z = 2$ es paralelo a la recta de ecuaciones paramétricas $x = 2t$, $y = 4t$, $z = 4t$, t es real.*

d) *Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal entonces el núcleo de T, N(T), es un subespacio de V.*

La Tabla 2 muestra los resultados obtenidos.

Tabla 2

Rúbrica de la actividad del examen del 31/07/24

It.	Sin respuesta	Respuesta incorrecta	Respuesta insuficiente	Respuesta casi correcta	Respuesta correcta
a	30	58	1	1	12
b	19	34	10	2	37
c	20	31	5	10	36
d	49	36	6	6	5

El primer y el cuarto incisos requieren de una demostración por ser verdaderos. Se observa que el porcentaje sin respuesta y respuesta incorrecta es del 86,27% y 83,33%, respectivamente. Este último inciso, d), es el mismo último inciso del primer estudio (las evaluaciones las realizan distintos profesores), dado que el concepto algebraico está involucrado en más de un resultado de aprendizaje de la planificación del espacio curricular; y, en consecuencia, siempre se evalúa. Y, sin embargo, los alumnos no lo tienen en cuenta, no lo estudian, no les parece necesario. La respuesta casi correcta más la correcta es del 10,78%. Los incisos b) y c) son falsos y, en general, a los estudiantes, les es más fácil justificarlos; se observa que la suma entre respuesta casi correcta y respuesta correcta es del 38,25% y 45,09%, respectivamente.

CONCLUSIONES

Observamos que, a pesar de insistir con argumentaciones, justificaciones y demostraciones en el curso de Álgebra y Geometría Analítica, a los estudiantes les sigue costando bastante, y, este hecho, es evidente en la evaluación global o integral de la asignatura.

Elementos centrales de la discusión de conceptos matemáticos, como por ejemplo: ¿qué significa verificar que un punto pertenezca o no a un lugar geométrico?; ¿qué relación existe entre el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales y la característica de no singularidad de la matriz de coeficientes?; ¿qué significación tienen los conceptos geométricos de paralelismo y ortogonalidad?;¿qué rol poseen las premisas que forman el antecedente en una implicación?; ¿qué significa demostrar una proposición verdadera por un método directo? ¿qué rol tienen los contraejemplos en las argumentaciones de proposiciones falsas? son intrascendentes para la mayoría de los estudiantes que colocan respuestas de forma no reflexiva.

Se observa la falta de importancia que el alumnado asigna a la comprensión de distintos procesos de argumentación en álgebra lineal; en particular, demostraciones de propiedades que son muy utilizadas en la resolución de actividades prácticas. Los estudiantes examinados han mostrado una tendencia a no hacer las demostraciones solicitadas, parecería que la demostración de una proposición verdadera carece de interés. No están acostumbrados a justificar el conocimiento científico.

En el cursado del año 2024 se implementaron cambios en la guía de trabajos prácticos para hacer conscientes a los estudiantes de las competencias y el grado en que las mismas podían irse reforzando y/o generando, gradualmente, con los recursos (contenidos del programa analítico) involucrados en cada unidad temática. Sin embargo, a la luz de la evaluación descripta de una única actividad de un único examen final de 2024, hasta el presente, se observa que hay que insistir en la enseñanza de las competencias lógico – matemáticas, en general y, en la argumentación, en particular.

REFERENCIAS

Benítez Pérez, A. A., Benítez Pérez, H., & García Rodríguez, M. L. (2016). La argumentación sustancial. Una experiencia con estudiantes de Nivel Medio Superior en clases de matemáticas. *Educación Matemática, 28*(3), 175-216. https://doi.org/10.24844/em2803.07

Cai, J., & Knuth, E. (2011). Early Algebraization. A Global Dialogue from Multiple Perspectives. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

De Gamboa, G., Planas, N., & Edo, M. (2010). Argumentación matemática: prácticas escritas. *Suma. Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 64*, 35-44. https://doi.org/10.24844/em2803.07

Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (2018). *Propuesta de estándares de 2° generación para la acreditación de carreras de ingeniería en la República Argentina "Libro rojo de CONFEDI"*. R. Giordano Lerena & S. Cirimelo, Eds. https://confedi.org.ar/download/documentos_confedi/LIBRO-ROJO-

DE-CONFEDI-Estandares-de-Segunda-Generacion-para-Ingenieria-2018-VFPublicada.pdf

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales* (M. Vega Restrepo, Trans.) (2da ed.). Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1995).

Páramo Morales, D. (2015). La teoría fundamentada (Grounded Theory), metodología cualitativa de investigación científica. *Pensamiento & Gestión, 39*, vii-xiv. http://www.scielo.org.co/pdf/pege/n39/n39a01.pdf

Grossman, S. I. (1996). *Álgebra lineal* (M. González Osuna, Trans.) (5ta ed.). McGraw-Hill. (Trabajo original publicado en 1994).

Jiménez Aleixandre, M. P. (2010). *10 Ideas clave. Competencias en argumentación y uso de pruebas*. Editorial Graó.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal* (V. H. Ibarra Mercado, Trans.) (8va ed.). Pearson Educación. (Trabajo original publicado en 2005).

Lay, D. C. (2017). *Álgebra Lineal para cursos con enfoque por competencias*. (A. E. García Hernández, Trans.). Pearson Educación. (Trabajo original publicado en 2012).

León Corredor, O. L., & Calderón, D. I. (2001). Validación y argumentación de lo matemático en el aula. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(1), 5-21. https://www.relime.org/index.php/relime/artículoicle/view/605

Noble, B., & Daniel, J. W. (1989). *Álgebra Lineal Aplicada*. (V. González Pozo, Trans.) (3ra ed.). Prentice-Hall Hispanoamericana. (Trabajo original publicado en 1987).

Perelman, Ch., & Olbrechts-Tyteca, L. (1989). *Tratado de la Argumentación. La nueva retórica*. (J. Sevilla Muñoz, Trans.). Editorial Gredos. (Trabajo original publicado en 1988).

Plantin, C. (1998). *La argumentación.* (A. Tusón Valls, Trans.) (2nd ed.). Editorial Ariel. S. A. (Trabajo original publicado en 1996).

Ríos-Cuesta, W. (2021). Aceleración de la crisis en la Educación Matemática del Chocó generada por el COVID-19. *Revista Latinoamericana De Etnomatemática. Perspectivas Socioculturales De La Educación Matemática,15*(1), 64-80. https://doi.org/10.22267/relatem.22151.86

Rivera Pérez, A. & Ruiz Vela, E. (2006). La habilidad argumentar y el adecuado desempeño del profesor. *EduSol, 6(*14), 1-11. https://www.redalyc.org/pdf/4757/475748653001.pdf

Zabalza Beraza, M. A. (2008). El trabajo por competencias en la enseñanza universitaria. En I. Rodríguez Escanciano (Ed.), *El nuevo perfil del profesor universitario en el EEES: claves para la renovación metodológica* (pp. 79-113). Universidad Europea Miguel de Cervantes.

* * * * *