Una introducción a la equivalencia definicional y a la Morita-equivalencia en la lógica multivariada de primer orden

José Javier González López[40]

Resumen

Este artículo presenta las diferencias existentes entre los conceptos de equivalencia definicional y Morita-equivalencia entre teorías frente al de equivalencia lógica también entre teorías, todos ellos en una Lógica multivariada de primer orden. Para llegar a esto, la primera parte del texto se centra en explicar con detenimiento los conceptos de signatura, estructura y semántica usual que nos encontramos en esta lógica. Todos ellos aplicados nos crean el marco adecuado para presentar y mejorar la definición tanto de la equivalencia definicional, como de la Morita-equivalencia entre dos teorías con respecto a los artículos que ya lo habían hecho y que aparecen en la bibliografía.

Palabras clave: lógica, equivalencia lógica, signatura, primer orden.

[40]Universidad de Salamanca, España, josejaviergl@usal.es, beneficiario de un contrato predoctoral por la Universidad de Salamanca y cofinanciado por el Banco Santander.

An introduction to definitional equivalence and Morita-equivalence in the Many-Sorted First Order Logic

Abstract

In this article we introduce the differences between the concepts of definitional equivalence and Morita-equivalence between theories, and the concept of logical equivalence between theories too, all of them under the Many-Sorted First Order Logic. In order to achieve this, in the first half of this text we focus on explaining the concepts of signature, structure and usual semantic we found in this logic. Next, we apply of these concepts to create the appropiate framework in order to present and improve the definitions of definitional equivalence and Morita-equivalence between theories regarding the articles that have already dealt with them before and that appear in our bibliography.

Keywords: logic, logical equivalence, signature, first order.

4.1. Lógica multivariada de primer orden

Para poder definir de forma precisa los conceptos que dan título a este texto, necesitamos previamente presentar de forma precisa la lógica en que se enmarca: la Lógica multivariada de primer orden. Empezaremos por las signaturas que clasifican a las estructuras y llegaremos a la semántica.

4.1.1. Signaturas

Definición 1. Definimos **signatura** Σ como una 3-tupla[41]

$$\Sigma = \langle Sort,\ Oper.Sym,\ Rank\rangle$$

donde ninguno de sus componentes son urelementos[42] y donde cada uno de sus componentes será de la siguiente manera:

- $Sort$ es un conjunto, finito o numerable, de símbolos cuya labor será la de indexar los universos sobre los que trabajaremos. Exigiremos que 0 sea elemento de $Sort$ y este indexará al universo de valores de verdad de cada uno de las estructuras que consideraremos más adelante. Por otro lado, para indexar al universo unión de todos los demás universos, incluiremos el índice η. Por último, para garantizar la existencia de otro universo, al menos, constituido de elementos, exigiremos la existencia de otro elemento en $Sort$ aparte de 0 y η.

[41]Generalización a 3 elementos del concepto de par ordenado.

[42]Elementos de un conjunto que no son conjuntos a su vez.

- $Oper.Sym$ es un conjunto, finito o numerable, de símbolos operacionales. Es decir, símbolos cuyo destino es el de ser funciones, relatores o constantes no lógicas para con los universos de estructuras. A diferencia de lo tratado en Manzano (1996, 229), añadimos explícitamente este conjunto a cualquier signatura en una posición anterior a la función $Rank$, que a continuación presentamos y que da naturaleza a cada uno de sus elementos, ya que $Oper.Sym$ es el dominio de dicha función.

- $Rank$ es una función con dominio en $Oper.Sym$ y con rango contenido en el conjunto $S_\omega[Sort \smallsetminus \eta]$, unión del conjunto de todas las tuplas finitas de elementos de $Sort$, excepto el η que más adelante detallaremos,

$$Rank: \ Oper.Sym \longrightarrow S_\omega[Sort \smallsetminus \eta]$$

  Esta función otorga rango a cada símbolo operacional de $Oper.Sym$, ya sea como functor, relator o constante no lógica.

Para esta lógica multivariada de primer orden que estamos presentando, hemos tomado como referencia principal Manzano (1996, Capítulo 6). Además, hemos introducido ciertas novedades o diferencias con respecto a este texto. La primera, que ya hemos presentado, es la de tomar como 3-tupla cualquier signatura Σ. En primer lugar, en Halvorson (2019),Barrett y Halvorson (2016), Barrett y Halvorson (2017) y Mceldowney (2019) se toman las signaturas simplemente como conjuntos de símbolos; nosotros, en cambio, diferenciamos de partida los símbolos que van destinados a indexar universos, formando el conjunto $Sort$, y los destinados a ser funciones, relaciones o constantes no lógicas, formando el conjunto $Oper.Sym$. Esa naturaleza de tupla de la signatura nos permite tener ordenados los símbolos y es sumamente útil cuando nos encontramos con una cantidad grande de universos y símbolos operacionales. Por último, al igual que en Manzano (1996, Capítulo 6) incluimos la función $Rank$ en nuestras signaturas.

Definición 2. En este punto podemos hablar de las **Σ-interpretación** ρ^Σ de cada $\rho \in Oper.Sym$. Estas interpretaciones serán de relatores, functores o constantes no lógicas.

Veámoslo en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. Dada la signatura

$$\Sigma = \langle \{0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, Rank \rangle$$

con $Rank(\rho_1) =< 0, \sigma_1 >$, $Rank(\rho_2) =< 0, \sigma_1, \sigma_2 >$, $Rank(\rho_3) =< \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 >$ y $Rank(\rho_4) =< \sigma_3 >$ las Σ-interpretaciones de los símbolos operacionales presentes, ρ_1^Σ, ρ_2^Σ, ρ_3^Σ y ρ_4^Σ los símbolos operacionales se comportarán de la misma manera en cualquier sistema de signatura Σ :

- ρ_1^Σ es un relator monario sobre el universo de índice σ_1 de cualquier sistema dado.

- ρ_2^{Σ} es un relator binario sobre los universos de índices σ_1 y σ_2 .
- ρ_3^{Σ} es un functor con dominio en el producto cartesiano de los universos de índices σ_2 y σ_3 e imagen en el universo de índice σ_1.
- ρ_4^{Σ} es una constante no lógica perteneciente al universo de índice σ_3.

Un concepto que resultará fundamental para las secciones siguientes es el siguiente:

Definición 3. Dadas dos signaturas

$$\Sigma = \langle Sort,\ Oper.Sym,\ Rank\rangle$$

$$\Sigma^+ = \langle Sort^+,\ Oper.Sym^+,\ Rank^+\rangle$$

decimos que Σ es **subsignatura** de Σ^+ (o Σ^+ **extensión** de Σ), lo cual denotamos por $\Sigma \subseteq \Sigma^+$, si ocurre al menos una de las siguientes:

- $Sort \subset Sort^+$
- $Oper.Sym \subset Oper.Sym^+$

y además que

$$Rank^+ \restriction_{Oper.Sym} = Rank$$

y que

$$Rank(Oper.Sym) \subseteq Rank^+(Oper.Sym^+)$$

Ejemplo 2. Continuando con el ejemplo justo anterior 1, para la signatura

$$\Sigma = \langle \{0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}, \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, Rank\rangle$$

con $Rank(\rho_1) =< 0, \sigma_1 >$, $Rank(\rho_2) =< 0, \sigma_1, \sigma_2 >$, $Rank(\rho_3) =< \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 >$ y $Rank(\rho_4) =< \sigma_3 >$, una subsignatura suya sería, por ejemplo,

$$\Sigma^- = \langle \{0, \sigma_1, \sigma_3\}, \{\rho_1, \rho_4\}, Rank^-\rangle$$

con $Rank^-(\rho_1) =< 0, \sigma_1 >$ y $Rank^-(\rho_4) =< \sigma_3 >$

4.1.2. Estructuras

Definición 4. Una **Σ-estructura**, o **estructura de signatura** Σ, será una tupla de la forma

$$\mathcal{A} = \left\langle \langle A_\sigma\rangle_{\sigma\in Sort}\ ,\ \langle \rho^{\mathcal{A}}\rangle_{\rho\in Oper.Sym}\right\rangle$$

donde:

- $\langle A_\sigma\rangle_{\sigma\in Sort}$ es la tupla de universos a la que exigiremos que:
  - $A_0 := \{V, F\}$ sea conjunto de valores de verdad.

- $A_\sigma \neq \varnothing$ para todo $\sigma \in Sort$.
- $A_\eta := \bigcup_{\sigma\neq 0} A_\sigma$
- $A_{\sigma_1} \cap A_{\sigma_2} = \varnothing$ para cualesquiera $\sigma_1, \sigma_2 \in Sort \setminus \eta$

- Si $Rank(\rho) = \langle \sigma_{j_0},\ \sigma_{j_1},\ \ldots,\ \sigma_{j_m}\rangle$, tendremos que la interpretación del símbolo operacional $\rho \in Oper.Sym$ en $\mathcal{A}$, $\rho^{\mathcal{A}}$, será una función de la forma:

$$\rho^{\mathcal{A}} : A_{\sigma_{j_1}} \times \ldots \times A_{\sigma_{j_m}} \longrightarrow A_{\sigma_{j_0}}$$

  Cuando $j_0 = 0$ ocurrirá que $Rank(\rho) = \langle 0,\ \sigma_{j_1},\ \ldots,\ \sigma_{j_m}\rangle$ y, así, $\rho^{\mathcal{A}}$ será una relación m-aria

$$\rho^{\mathcal{A}} : A_{\sigma_{j_1}} \times \ldots \times A_{\sigma_{j_m}} \longrightarrow A_0$$

  que además, podremos identificar con el conjunto:

$$\{(a_{\sigma_{j_1}}, \ldots, a_{\sigma j_m}) \in A_{\sigma_{j_1}} \times \ldots \times A_{\sigma_{j_m}} \ :\ R(a_{\sigma_{j_1}}, \ldots, a_{\sigma_{j_m}}) = T\}$$

- Si $Rank(\rho) = \langle \sigma_j \rangle$, tendremos que $\rho^{\mathcal{A}}$ será una constante no lógica de tal manera que $\rho^{\mathcal{A}} \in A_{\sigma_j}$.

Así, dado cualquier $\rho \in Oper.Sym$, quedan diferenciados, de forma clara, dos conceptos distintos :

- La Σ-interpretación ρ^{Σ} como símbolo operacional interpretado bajo una signatura Σ siendo functor, relator o constante no lógica, que nos dice exactamente sobre qué universos de cualquier Σ-estructura actuará, y de qué manera. Para referirnos a ellos no hará falta referirnos a ninguna Σ-estructura en concreto.

- $\rho^{\mathcal{A}}$, siendo $\mathcal{A}$ una Σ-estructura, que será una función, una relación o una constante no lógica sobre unos universos $\langle A_\sigma \rangle_{\sigma\in Sort}$.

Ejemplo 3. Volvamos sobre lo presentado en el ejemplo 1. Bajo la signatura

$$\Sigma = \langle \{0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \eta\}, \{\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4\}, Rank\rangle$$

con $Rank(\rho_1) =< 0, \sigma_1 >$, $Rank(\rho_2) =< 0, \sigma_1, \sigma_2 >$, $Rank(\rho_3) =< \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 >$ y $Rank(\rho_4) =< \sigma_3 >$ tendremos que cualquier Σ-estructura será de la forma

$$\mathcal{A} = \left\langle \langle A_0, A_{\sigma_1}, A_{\sigma_2}, A_{\sigma_3}, A_\eta \rangle\ ,\ \left\langle \rho_1^{\mathcal{A}}, \rho_2^{\mathcal{A}}, \rho_3^{\mathcal{A}}, \rho_4^{\mathcal{A}} \right\rangle \right\rangle$$

con

- $A_0 = T, F$

- $A_{eta} = A_{\sigma_1} \cup A_{\sigma_2} \cup A_{\sigma_3}$

- $\rho_1^{\mathcal{A}} : A_{\sigma_1} \longrightarrow A_{\sigma_0}$ un relator monario que se puede identificar con el subconjunto
$$\left\{a_{\sigma_1} \in A_{\sigma_1} \ : \ \rho_1^{\mathcal{A}}\left(a_{\sigma_1}\right) = T\right\}$$
- $\rho_1^{\mathcal{A}} : A_{\sigma_1} \times A_{\sigma_1} \longrightarrow A_{\sigma_0}$ un relator binario que se puede identificar con el conjunto
$$\left\{\left(a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}\right) \in A_{\sigma_1} \times A_{\sigma_2} \ : \ \rho_2^{\mathcal{A}}\left(a_{\sigma_1}, a_{\sigma_2}\right) = T\right\}$$
- $\rho_3^{\mathcal{A}} : A_{\sigma_2} \times A_{\sigma_3} \longrightarrow A_{\sigma_1}$ una función.
- $\rho_4^{\mathcal{A}} \in A_{\sigma_3}$ una constante no lógica.

4.1.3. Alfabeto, expresiones, términos y fórmulas

Definición 5. Dada la signatura

$$\Sigma = \langle Sort,\ Oper.Sym,\ Rank\rangle$$

definimos el **Σ-alfabeto** $\mathcal{L}$ como la clase que contiene:

a) Todos los elementos del conjunto

$$\vartheta = \bigcup\{\vartheta_\sigma \ : \ \sigma \in Sort \smallsetminus 0\}$$

donde cada ϑ_σ es un conjunto de variables tal que $|\vartheta_\sigma| \geq |A_\sigma|$

b) Todos los símbolos operacionales de Σ, es decir, todos los elementos de $Oper.Sym$. Entre ellos destacamos el símbolo de pertenencia $\in_\eta$ entre dos elementos del universo unión A_η, de tal manera que,

$$\forall x_{\sigma_1} \forall x_{\sigma_2}\left(x_{\sigma_1} \in_\eta x_{\sigma_2} \leftrightarrow x_{\sigma_1} \in x_{\sigma_2}\right)$$

que nos permite bajar del metalenguaje el símbolo propio de la teoría de cojuntos.

c) Los cuantificadores existencial $\exists$ y universal $\forall$.[43]

d) Los símbolos de igualdad $=_\sigma$ para elementos de cada $\sigma \in Sort$. Si queremos afirmar que dos elementos de universos distintos son iguales utilizaremos el símbolo de igualdad del universo unión $=_\eta$ Ahora bien, salvo que queramos especificarlo por la importancia de algún caso en particular utilizaremos siempre el símbolo $=$.

Definición 6. Fijado Σ-alfabeto $\mathcal{L}$, el **conjunto** $Exp(\mathcal{L})$ **de expresiones**, lo construimos recursivamente de la siguiente manera:

[43] Se podría considerar un cuantificador existencial y un universal distinto para cada elemento de Sort, $\exists_\sigma$ y $\forall_\sigma$, pero consideraremos los mismos para todas las signaturas por economía en el lenguaje.

a) Cada $v \in \vartheta$ será una expresión

$$v \in Exp(\mathcal{L})$$

.

b) Para cada $\rho \in Oper.Sym$ tal que $Rank(\rho) = \langle \sigma_{j_k} \rangle$, tendremos que $\rho^{\Sigma} \in Exp(\mathcal{L})$.[44]

c) Para cada $\rho \in Oper.Sym$ tal que $Rank(\rho) = \langle \sigma_{j_0}, \sigma_{j_1}, \ldots, \sigma_{j_n} \rangle$, $n > 0$, y para cada $\varepsilon_{j_1},\ \varepsilon_{j_2}, \ldots\ \varepsilon_{j_n} \in Exp(\mathcal{L})$ tales que $Rank(\varepsilon_{\sigma_{j_0}}) \neq \langle 0 \rangle$ para $k \in \{1, \ldots, n\}$, el resultado de aplicar estas últimas a ρ^{Σ} será también una expresión de $\mathcal{L}$

$$\rho^{\Sigma} \varepsilon_{j_1} \ldots \varepsilon_{j_n} \in Exp(\mathcal{L})$$

tal que $Rank(\rho^{\Sigma} \varepsilon_{j_1} \ldots \varepsilon_{j_n}) = \langle i_0 \rangle$.

d) Para cada $\varepsilon \in Exp(\mathcal{L})$ tal que $Rank(\varepsilon) = 0$ y para cada $x \in \vartheta$, tendremos que

$$\exists x \varepsilon,\ \forall x \varepsilon \in Exp(\mathcal{L})$$

y además $Rank(\exists x \varepsilon) = Rank(\forall x \varepsilon) = \langle 0 \rangle$.

Definición 7. Podemos dividir, en este punto, las expresiones de un Σ-alfabeto dado en dos conjuntos disjuntos: el de sus **términos** y el de sus **fórmulas**:

$$Form(\mathcal{L}) := \{\varepsilon \in Exp(\mathcal{L})\ :\ Rank(\varepsilon) = \langle 0 \rangle\}$$

$$Term(\mathcal{L}) := \{\varepsilon - \in Exp(\mathcal{L})\ :\ Rank(\varepsilon) \neq \langle 0 \rangle\}$$

Los términos no irán acompañados, como veremos en la sección siguiente dedicada a la semántica4.1.4, de un valor de verdad sobre ellos, mientras que las fórmulas sí serán verdaderas o falsas (en nuestro caso de sólo dos valores de verdad) bajo una interpretación dada.

Nota 1. Como hemos notado en esta definición del conjunto $Exp(\mathcal{L})$, hemos cometido un abuso al dar imagen en $Rank$ a expresiones más allá del conjunto de símbolos operacionales $Oper.Sym$. Por tanto, a partir de ahora consideraremos $Rank$ de la siguiente manera:

$$Rank:\ Oper.Sym \cup Exp(\mathcal{L}) \longrightarrow S_{\omega}[Sort \smallsetminus \eta]$$

[44] En Manzano (1996), no se consideran como expresiones a las constantes no lógicas, nosotros, en cambio, como ya están interpretadas bajo una signatura sigma, ρ^{Σ}, sí las consideraremos dentro de un alfabeto $\mathcal{L}$ definido bajo la misma signatura Σ que éstas.

4.1.4. Semántica

Más allá de considerar cada expresión de nuestro Σ-alfabeto, ¿qué interpretación o sentido semántico recibirá cada una dentro del marco de una Σ-estructura cualquiera?, es decir, ¿cuál será su significado bajo un determinada Σ-estructura? Veámoslo:

Definición 8. Dada una Σ-estructura

$$\mathcal{A} = \left\langle \langle A_\sigma \rangle_{\sigma \in Sort} \; \langle \rho^{\mathcal{A}} \rangle_{\rho \in Oper.Sym} \right\rangle$$

llamamos **asignación sobre la estructura** $\mathcal{A}$ a una aplicación

$$M_{\mathcal{A}} : \bigcup_{\sigma \in Sort} \vartheta_\sigma \longrightarrow \bigcup_{\sigma \in Sort} A_\sigma$$

para la que siempre $M_{\mathcal{A}}(\vartheta_\sigma) \subseteq A_\sigma$ para cada $\sigma \in Sort$.
Estas asignaciones nos ayudarán a tratar y relacionar nuestras variables con lo que estas representen.

Definición 9. Una **Σ-interpretación $\mathcal{I}$ sobre una Σ-estructura** $\mathcal{A}$ es un par ordenado

$$\mathcal{I} = \langle \mathcal{A}, M_{\mathcal{A}} \rangle$$

donde $M_{\mathcal{A}}$ es una asignación cualquiera sobre $\mathcal{A}$.

Veamos ahora, recursivamente, cómo actúa $\mathcal{I} = \langle \mathcal{A}, M_{\mathcal{A}} \rangle$ sobre $Exp(\mathcal{L})$:

a) Para cada $x \in \vartheta$ tendremos que

$$\mathcal{I}(x) := M_{\mathcal{A}}(x)$$

b) Para cada $\rho \in Oper.Sym$ tal que $Rank(\rho) = \langle \sigma \rangle$, ocurrirá que

$$\mathcal{I}\left(\rho^{\Sigma}\right) := \rho^{\mathcal{A}} \in A_\sigma$$

c) Para cada $\rho \in Oper.Sym$ tal que $Rank(\rho) = \langle \sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_n} \rangle$ y para cada $\varepsilon_{\sigma_{i_1}}, \dots \varepsilon_{\sigma_{i_n}} \in Exp(\mathcal{L})$ tales que $Rank(\varepsilon_{\sigma_{i_k}}) = \langle \sigma_{i_k} \rangle$ para todo $k \in \{1, \dots n\}$, tendremos que

$$\mathcal{I}\left(\rho^{\Sigma} \varepsilon_{\sigma_{i_1}} \dots \varepsilon_{\sigma_{i_n}}\right) := \rho^{\mathcal{A}} \mathcal{I}(\varepsilon_{\sigma_{i_1}}) \dots \mathcal{I}(\varepsilon_{\sigma_{i_n}})$$

d) Dada la variable $x_\sigma \in \vartheta_\sigma$ y un elemento $a_\sigma \in A_\sigma$ podemos definir la nueva asignación:

$$M_{x_\sigma}^{a_\sigma} := \begin{cases} M(x_\xi) \in A_\xi & \text{si } \xi \neq \sigma, \\ a_\sigma \in A_\sigma & \text{si } \xi = \sigma \end{cases}$$

Así, para cada $\varepsilon \in Form(\mathcal{L})$ y $x_\sigma \in \vartheta_\sigma$ tendremos que

- $\mathcal{I}(\exists x_\sigma \varepsilon^\Sigma) = T$ si y sólo si $\left\{a_\sigma \in A_\sigma \ : \ \left\langle \mathcal{A},\ M^{a_\sigma}_{x_\sigma} \right\rangle (\varepsilon^) = T \right\} \neq \varnothing$
- $\mathcal{I}(\forall x_\sigma \varepsilon^\Sigma) = T$ si y sólo si $\left\{a_\sigma \in A_\sigma \ : \ \left\langle \mathcal{A},\ M^{a_\sigma}_{x_\sigma} \right\rangle (\varepsilon) = T \right\} = A_\sigma$

Definición 10. Un caso particular muy interesante de todos los expuestos en 9 es el las Σ**-fórmula**s (los elementos de $Form(\mathcal{L})$), ya que son las únicas expresiones cuyas interpretaciones desembocan en el universo A_0, de valores de verdad, de la interpretación $\mathcal{I} = \langle \mathcal{A}, M_{\mathcal{A}} \rangle$ escogida.

Así, como para cada Σ-fórmula φ tenemos que

$$\mathcal{I}(\varphi) \in A_0 = \{T,\ F\}$$

y decimos que la Σ-interpretación es un **modelo para la** Σ**-fórmula** φ si ocurre que

$$\mathcal{I}(\varphi) = T$$

De la misma manera, la Σ-interpretación es **un modelo para un conjunto de** Σ**-fórmulas** $\mathit{\Gamma} \in Form(\mathcal{L})$ cualquiera, si $\mathcal{I}$ es un modelo para toda $\varphi \in \mathit{\Gamma}$.

Por último, diremos que la Σ-fórmula φ es **consecuencia semántica del conjunto de** Σ**–fórmulas** $\mathit{\Gamma}$

$$\mathit{\Gamma} \vDash \varphi$$

si cada modelo de $\mathit{\Gamma}$ es también modelo de φ

Definición 11. Definamos ahora, por recursión,

$$FreeVar(Exp(\mathcal{L})) \coloneqq \bigcup_{\varepsilon \in Exp(\mathcal{L})} FreeVar(\varepsilon)$$

el conjunto de **variables libres** de todas las expresiones de un Σ-lenguaje $\mathcal{L}$:

1. Para cada $v \in \vartheta$ tenemos que $FreeVar(x) = \{x\}$
2. Para cada constante no lógica ρ^Σ, $Rank(\rho) = \langle \sigma \rangle$, tenemos que
$$FreeVar(\rho^\Sigma) = \varnothing$$
3. Para cada $\rho \in Oper.Sym$ tal que $Rank(\rho) = \langle \sigma_{i_0}, \sigma_{i_1}, \dots, \sigma_{i_n} \rangle$ y para $\varepsilon_{i_1},\ \varepsilon_{i_2}, \dots\ \varepsilon_{i_n} \in Exp(\mathcal{L})$ tales que $Rank(\varepsilon_{i_k}) \neq \langle 0 \rangle$ para todo $k \in \{1, \dots, n\}$, tendremos que
$$FreeVar\left(\rho^\Sigma \varepsilon_{i_1} \dots \varepsilon_{i_n}\right) = FreeVar(\varepsilon_{i_1}) \cup \dots \cup FreeVar(\varepsilon_{i_n})$$
4. Para cada $\varepsilon \in Form(\mathcal{L})$ y para cada $x \in \vartheta$, tendremos que
$$FreeVar\left(\exists x_\sigma \varepsilon\right) = FreeVar\left(\forall x_\sigma \varepsilon\right) = FreeVar(\varepsilon) \smallsetminus \{x_\sigma\}$$

Definición 12. Decimos que una Σ-fórmula φ es una Σ**-sentencia** si no contiene variables libres, es decir,

$$FreeVar(\varphi^\Sigma) = \varnothing$$

Por otra parte, llamaremos Σ**-teoría** a cualquier conjunto de Σ-sentencias.

4.2. El problema con la equivalencia lógica

Esta sección está dedicada a enunciar el problema para el cual los conceptos que expondremos en las siguientes secciones están diseñados para resolver. El problema surge a partir del concepto de equivalencia lógica entre teorías. Veamos este:

Definición 13. Dos teorías cualesquiera Th_1 y Th_2 son **lógicamente equivalentes**

$$Th_1 \cong Th_2$$

si comparten todos sus modelos.

Este criterio parece el ideal para comparar el comportamiento de sentencias de nuestra lógica multivariada de primer orden conforme estas sean agrupadas de forma distinta en teorías: bastaría con estudiar sus modelos. Ahora bien, se nos presenta casi automaticamente un escollo:

Teorema 1. Compartir signatura es una propiedad necesaria para la equivalencia lógica de dos teorías.

Demostración. Basta ver que dos teorías no pueden tener los mismos modelos si las estructuras de estos tienen distinta signatura: tanto porque pueden tener distinta cantidad de universos, distinta cantidad de símbolos operacionales, o igual cantidad de estos últimos pero con distinto número de funciones, relaciones o constantes no lógicas. □

Así, dada una signatura Σ cualquiera, sólo podremos comparar los modelos de las Σ-teorías que se nos presenten, pero no mucho más allá. ¿Cómo podremos estudiar la relación entre dos teorías de distinta signatura? ¿Podrán semánticamente contener la misma información o estar representando lo mimso? Eso es lo que intentaremos responder en todo lo que resta de este texto, haciendo presentes los conceptos de equivalencia definicional4.3 y Morita-equivalencia4.4.

4.3. Equivalencia definicional de dos teorías

Visto que es necesario tener la misma signatura para una equivalencia lógica entre dos teorías, buscaremos nociones de equivalencia más laxas que permitan no compartir signatura. Empezaremos por la de equivalencia definicional; pero antes será necesario introducir el concepto de definición explícita de un operador en función de una subsignatura.

4.3.1. Definición explícita de un operador en términos de una signatura

Dadas Σ un signatura, Σ^+ una extensión de Σ y $\rho^+ \in Oper.Sym^+ \setminus Oper.Sym$. Una **definición explícita de ρ^+ en términos de la subsignatura** Σ[45] será:

[45] Este concepto está basado en la definición que aparece en (Hodges, 1993, 59)

- Si $Rank^{+}(\rho^{+}) = \langle 0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$, una Σ^{+}-sentencia de la forma

$$\forall x_{\sigma_1} \ldots \forall x_{\sigma_n} \left(\rho^{+^{\Sigma^{+}}} (x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) \leftrightarrow \phi(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) \right)$$

  donde ϕ es una cierta Σ-fórmula.

- Si $Rank^{+}(\rho^{+}) = \langle \sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$ con $\sigma_0 \in Sort^{+} \smallsetminus Sort$, una Σ^{+}-sentencia de la forma

$$\forall x_{\sigma_1} \ldots \forall x_{\sigma_n} \forall y_{\sigma_0} \left(\rho^{+^{\Sigma^{+}}} (x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}) = y_{\sigma_0} \leftrightarrow \phi(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}, y_{\sigma_0}) \right)$$

  donde ϕ es una cierta Σ-fórmula que admite como parámetro un elemento indexado por σ_0.
  En particular, para este caso una condición de admisibilidad[46] de la definición explícita será la Σ^{+}-sentencia

$$\exists x_{\sigma_1} \ldots \exists x_{\sigma_n} \exists y_{\sigma_0} \phi \left(x_{\sigma_1}, \ldots, x_{\sigma_n}, x_{\sigma_0} \right)$$

- Si $Rank^{+}(\rho^{+}) = \langle \sigma_k \rangle$, será una Σ^{+}-sentencia de la forma

$$\forall x_{\sigma_k} \left(x_{\sigma_k} = \rho^{+^{\Sigma^{+}}} \leftrightarrow \phi(x_{\sigma_k}) \right)$$

  donde ϕ es una cierta Σ-fórmula.
  En particular, para este caso una condición de admisibilidad de la definición explícita será la Σ^{+}-sentencia

$$\exists x_{\sigma_k} \phi(x_{\sigma_k})$$

De esta manera se consigue explicitar la naturaleza de un operador nuevo en función de una fórmula que sólo necesita algunos elementos que ya teníamos en la subsignatura de la que se partía: no estamos añadiendo semánticamente nada distinto.

4.3.2. Extensión definicional de una teoría

Definición 14. Dadas $\Sigma \subseteq \Sigma^{+}$ dos signaturas, la primera subsignatura de la segunda, y una Σ-teoría Th, diremos que la Σ^{+}-teoría Th^{+} es una **extensión definicional** de Th hacia la signatura Σ^{+} si ocurre que

$$Th^{+} = Th \cup \{ \delta_{\rho^{+}} \ : \ \rho^{+} \in Oper.Sym^{+} \smallsetminus Oper.Sym \}$$

donde

- Cada $\delta_{\rho^{+}}$ es una definición explítica de ρ^{+} en términos de la subsignatura Σ de la manera en que la hemos definido en 4.3.1.

[46] Una condición necesaria.

- Si α_{ρ^+} es una condición de admisibilidad de ρ^+ ocurre que
$$Th \vDash \alpha_{\rho^+}$$

Así, hemos logrado extender teorías hacia otras en otra signatura extensión de la que partíamos, que sólamente contienen definiciones de nuevos operadores que, estrictamente, se pueden definir a partir de fórmulas que ya estaban en la subsignatura origen.

4.3.3. Equivalencia definicional de dos teorías

Definición 15. Dadas Th_1 y Th_2 dos teorías con signatura Σ_1 y Σ_2, respectivamente, decimos que son **definicionalmente equivalentes** si existe una cierta Σ^+-teoría Th^+ tal que Σ^+ es, a la vez, una signatura extensión de Σ_1 y, además, Σ_2 y Th^+ es extensión definicional de Th_1 y Th_2.

Así, hemos encontrado otro criterio de equivalencia entre teorías, que nos permite comparar teorías con distinta signatura. Ahora bien, distinta signatura sí, pero han de compartir el mismo conjunto $Sort$ de índices para universos. ¿Cómo comparamos, pues, teorías con distintas tuplas de índices para universos? Para resolver esta cuestión usaremos el concepto de Morita-equivalencia que desarrollamos en la siguiente sección en la siguiente sección.

4.4. Morita-equivalencia de dos teorías

La Morita-equivalencia, a diferencia de la equivalencia definicional, ya vista en 4.3, nos permite introducir también nuevos universos a través de la ampliación del conjunto $Sort$ de índices para universos de una signatura Σ dada. En esta sección no sólo la vamos a introducir y a definir de una manera muy determinada estos índices, sino que vamos a definir un nuevo concepto de Morita-extensión que creemos más conveniente al que aparece en Barrett y Halvorson (2016), Barrett y Halvorson (2017), Halvorson (2019) y Mceldowney (2019). Al verse modificado este último concepto también lo hará implícitamente el de Morita-equivalencia de dos teorías.

4.4.1. Algunas formas de crear nuevos universos en una estructura

En este artículo vamos a considerar las maneras que ya se han sopesado anteriormente en artículos como Barrett y Halvorson (2017, 5-6), Barrett y Halvorson (2016, 563-65), Mceldowney (2019, 6-7), para crear nuevos índices que creen automáticamente nuevos universos a partir de unos dados la subestructura que se tome. Estas cuatro formas consisten en crear el índice del universo producto cartesiano de dos ya existentes, el índice de un universo unión disjunta de dos ya existentes, del índice de un universo subconjunto de un universo ya existente, y el índice para un universo conjunto cociente de un universo existente con respecto a una relación de equivalencia. Veámoslos:

Producto cartesiano

Dadas las signaturas

$$\Sigma = \langle Sort,\ Oper.Sym,\ Rank\rangle$$

$$\Sigma^{+} = \langle Sort^{+},\ Oper.Sym^{+},\ Rank^{+}\rangle$$

tales que $\Sigma \subseteq \Sigma^{+}$, y dados $\sigma_1, \sigma_2 \in Sort$, una **sort-definición** de un $\sigma \in Sort^{+} \smallsetminus Sort$, a través de $\mu_1, \mu_2 \in Oper.Sym^{+} \smallsetminus Oper.Sym$, tales que $Rank^{+}(\mu_j) =< \sigma_j, \sigma >$ con $j \in \{1,2\}$ **como producto en términos de** Σ es una Σ^{+}-sentencia de la forma

$$\delta_\sigma := \forall x_{\sigma_1} \forall x_{\sigma_2} \exists! z_\sigma \left(\mu_1(z_\sigma) = x_{\sigma_1} \wedge \mu_2(z_\sigma) = x_{\sigma_2}\right)$$

Así, en una Σ^{+}–estructura cualquiera $\mathcal{A}$, habrá un nuevo universo de índice σ, que será el producto cartesiano de los dos ya preexistentes de índices σ_1 y σ_2

$$A_\sigma = A_{\sigma_1} \times A_{\sigma_2}$$

De esta manera, los elementos de A_σ serán los $a_\sigma = \left\langle a_{\sigma_1, a_{\sigma_2}} \right\rangle$ y las funciones μ_1 y μ_2 serán las respectivas proyecciones

$$\begin{aligned} \mu_k : A_\sigma &\longrightarrow A_{\sigma_k} \\ \langle x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}\rangle &\longmapsto x_{\sigma_j} \end{aligned}$$

Unas de las definiciones explícitas existentes de μ_1 y μ_2, conforme las definimos en 4.3.1, serán:

$$\delta_{\mu_1} = \forall x_{\sigma_1} \forall x_\sigma \left((\mu_1(x_\sigma) = x_{\sigma_1}) \leftrightarrow \exists x_{\sigma_2} \left(x_\sigma =_\eta \langle x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}\rangle\right)\right)$$

$$\delta_{\mu_2} = \forall x_{\sigma_2} \forall x_\sigma \left((\mu_2(x_\sigma) = x_{\sigma_2}) \leftrightarrow \exists x_{\sigma_1} \left(x_\sigma =_\eta \langle x_{\sigma_1}, x_{\sigma_2}\rangle\right)\right)$$

Coproducto o unión disjunta

Dadas las signaturas

$$\Sigma = \langle Sort,\ Oper.Sym,\ Rank\rangle$$

$$\Sigma^{+} = \langle Sort^{+},\ Oper.Sym^{+},\ Rank^{+}\rangle$$

tales que $\Sigma \subseteq \Sigma^{+}$, y dados $\sigma_1, \sigma_2 \in Sort$, una **sort-definición** de un nuevo $\sigma \in Sort^{+} \smallsetminus Sort$, a través de unos $\varrho_1, \varrho_2 \in Oper.Sym^{+} \smallsetminus Oper.Sym$, tales que $Rank^{+}(\varrho_j) =< \sigma, \sigma_j >$ con $j \in \{1,2\}$ **como coproducto o unión disjunta en términos de** Σ es una Σ^{+}-sentencia de la forma

$$\begin{aligned} \delta_\sigma = \forall z_\sigma \left(\exists! x_{\sigma_1}(\varrho_1(x_{\sigma_1}) = z_\sigma) \vee \exists! x_{\sigma_2}(\varrho_2(x_{\sigma_2}) = z_\sigma)\right) \\ \wedge \forall x_{\sigma_1} \forall x_{\sigma_2}(\varrho_1(x_{\sigma_1}) \neq \varrho_2(x_{\sigma_2})) \end{aligned}$$

Así, en una Σ^+–estructura cualquiera $\mathcal{A}$, habrá un nuevo universo que será la unión disjunta de dos universos ya preexistentes

$$A_\sigma = A_{\sigma_1} \dot\cup A_{\sigma_2}$$

y las funciones ϱ_1 y ϱ_2 serán las respectivas inclusiones

$$\begin{aligned} \varrho_j : A_{\sigma_j} &\hookrightarrow A_\sigma \\ x_{\sigma_j} &\longmapsto x_\sigma \end{aligned}$$

Unas de las posibles definiciones explícitas de ϱ_1, ϱ_2, conforme las definimos en 4.3.1, serán:

$$\delta_{\varrho_1} = \forall x_{\sigma_1} \forall x_\sigma \left(\varrho_1(x_{\sigma_1}) = x_\sigma \leftrightarrow \left(\left(\forall x_{\sigma_2} (x_\sigma \neq_\eta x_{\sigma_2}) \right) \wedge (x_{\sigma_1} =_\eta x_\sigma) \right) \right)$$

$$\delta_{\varrho_2} = \forall x_{\sigma_2} \forall x_\sigma \left(\varrho_2(x_{\sigma_2}) = x_\sigma \leftrightarrow \left(\left(\forall x_{\sigma_1} (x_\sigma \neq_\eta x_{\sigma_1}) \right) \wedge (x_{\sigma_2} =_\eta x_\sigma) \right) \right)$$

Subuniverso

Dadas las signaturas

$$\Sigma = \langle Sort,\ Oper.Sym,\ Rank \rangle$$

$$\Sigma^+ = \langle Sort^+,\ Oper.Sym^+,\ Rank^+ \rangle$$

tales que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$, y dado $\sigma_0 \in Sort$, una **sort-definición** de un nuevo $\sigma \in Sort^+ \smallsetminus Sort$ a través de la función $i \in Oper.Sym^+ \smallsetminus Oper.Sym$, tal que $Rank^+(i) = \langle \sigma_0, \sigma \rangle$ **como subuniverso o subsort** en términos de Σ es una Σ^+-sentencia de la forma

$$\begin{aligned} \delta_\sigma = \forall x_{\sigma_0} \left(\exists z_\sigma (i(z_\sigma) = x_{\sigma_0} \leftrightarrow \phi(x_{\sigma_0})) \right) & \\ \wedge\, \forall z_{1_\sigma} \forall z_{2_\sigma} \left(i(z_{1_\sigma}) = i(z_{2_\sigma}) \to z_{1_\sigma} = z_{2_\sigma} \right) & \end{aligned}$$

siendo ϕ una cierta Σ-fórmula.
Así, en una Σ^+–estructura cualquiera $\mathcal{A}$, habremos creado un nuevo universo A_σ que será el subconjunto conformado por los elementos de un universo preexistente A_{σ_0} que cumplan la fórmula ϕ

$$A_\sigma \subseteq A_{\sigma_0}$$

La función i será la inclusión del nuevo subuniverso

$$\begin{aligned} i : A_\sigma &\hookrightarrow A_{\sigma_0} \\ x_\sigma &\longmapsto i(x_\sigma) \end{aligned}$$

Una condición de admisibilidad para la sort-definición de σ como subsort en términos de Σ, es la Σ-sentencia

$$\exists x_{\sigma_0} \phi(x_{\sigma_0})$$

Una de las posibles definiciones explícitas de la función i, conforme definimos este concepto en 4.3.1, será la siguiente:

$$\delta_i = \forall x_{\sigma_0} \forall x_\sigma \left(i(x_\sigma) = x_{\sigma_0} \leftrightarrow (p(x_{\sigma_0}) \wedge (x_\sigma =_\eta x_{\sigma_0}))\right)$$

Conjunto cociente

Dadas las signaturas

$$\Sigma = \langle Sort,\ Oper.Sym,\ Rank \rangle$$
$$\Sigma^+ = \langle Sort^+,\ Oper.Sym^+,\ Rank^+ \rangle$$

tales que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$, y dado $\sigma_0 \in Sort$, una **sort-definición** de un nuevo $\sigma \in Sort^+ \smallsetminus Sort$ a través de la función $\pi \in Oper.Sym^+ \smallsetminus Oper.Sym$, tal que $Rank^+(\pi) =< \sigma, \sigma_0 >$, como **universo cociente o índice cociente en términos de** Σ es una Σ^+-sentencia de la forma

$$\delta_\sigma = \forall x_{1_{\sigma_0}} \forall x_{2_{\sigma_0}} \left(\pi(x_{1_{\sigma_0}}) = \pi(x_{2_{\sigma_0}}) \leftrightarrow \phi(x_{1_{\sigma_0}}, x_{2_{\sigma_0}})\right) \wedge \forall z_\sigma \exists x_{\sigma_0} \left(\pi(x_{\sigma_0}) = z_\sigma\right)$$

siendo ϕ una cierta Σ-relación de equivalencia.
Así, en una Σ^+–estructura dada $\mathcal{A}$, habremos creado un nuevo universo A_σ que será conjunto cociente

$$A_\sigma = A_{\sigma_0}/\phi$$

Por la propia naturaleza de ϕ de Σ-relación de equivalencia, reflexiva, simétrica y transitiva, las condiciones de admisibilidad serán, respectivamente, las siguientes Σ-sentencias:

$$\forall x_{\sigma_0} \phi\left(x_{\sigma_0}, x_{\sigma_0}\right)$$
$$\forall x_{1_{\sigma_0}} \forall x_{2_{\sigma_0}} \left(\phi(x_{1_{\sigma_0}}, x_{2_{\sigma_0}}) \leftrightarrow \phi(x_{2_{\sigma_0}}, x_{1_{\sigma_0}})\right)$$
$$\forall x_{1_{\sigma_0}} \forall x_{2_{\sigma_0}} \forall x_{3_{\sigma_0}} \left(\phi(x_{1_{\sigma_0}}, x_{2_{\sigma_0}}) \wedge \phi(x_{2_{\sigma_0}}, x_{3_{\sigma_0}}) \to \phi(x_{1_{\sigma_0}}, x_{3_{\sigma_0}})\right)$$

Las función π es la proyección del universo A_{σ_0} hacia el el nuevo universo conjunto cociente:

$$\begin{aligned} \pi : A_{\sigma_0} &\longrightarrow A_{\sigma_0}/\phi \\ x_{\sigma_0} &\longmapsto [x_{\sigma_0}] \end{aligned}$$

donde $[x_{\sigma_0}]$ es la clase de equivalencia de x_{σ_0} con respecto a la relación de equivalencia ϕ.
Por otro lado, una definición explícita de la proyección π, conforme las definimos en 4.3.1, será, por ejemplo,

$$\delta_\pi = \forall x_{\sigma_0} \forall x \left(\pi(x_{\sigma_0}) = x_\sigma \leftrightarrow (\exists y_{\sigma_0} \phi(x_{\sigma_0}, y_{\sigma_0} \wedge (x_{\sigma_0} \in x_\sigma)))\right)$$

4.4.2. Morita-extensión de dos teorías

Presentamos a continuación nuestra definición de Morita-extensión:

Definición 16. Dadas las signaturas

$$\Sigma = \langle Sort,\ Oper.Sym,\ Rank \rangle$$

$$\Sigma^+ = \langle Sort^+,\ Oper.Sym^+,\ Rank^+ \rangle$$

tales que $\Sigma \subseteq \Sigma^+$ y dada una Σ-teoría Th, una Σ^+-teoría Th^+ tal que $Th \subset Th^+$ es una **Morita-extensión de** Th **hacia la signatura** Σ^+ si es de la forma

$$Th^+ := Th \cup SD \cup ED$$

donde

a) El conjunto SD está formado por sort-definiciones δ_{σ^+}, con $\sigma^+ \in Sort^+ \setminus Sort$, construidas todas ellas de alguna de las cuatro maneras que hemos presentado en 4.4.1.

b) El conjunto ED está formado por definiciones explícitas δ_{ρ^+} de operadores $\rho^+ \in Oper.Sym^+ \setminus Oper.Sym$, construidas estrictamente de alguna de las formas presentadas en 4.3.1, y que, además, no aparecen en ninguna de las sort-definiciones que forman SD

c) Si a_{σ^+} es una condición de admisibilidad para una sort-definicióin $\delta_{\sigma^+} \in SD$, conforme la hemos visto en a, entonces ha de cumplirse que

$$Th \vDash a_{\sigma^+}$$

d) Si a_{ρ^+} es una condición de admisibilidad para una definición explícita $\delta_{\rho^+} \in ED$, conforme la hemos visto en b, entonces ha de cumplirse que

$$Th \vDash a_{\rho^+}$$

4.4.3. El problema con las definiciones de Morita-extensión ya existentes

Tanto en los artículos Barrett y Halvorson (2017, 6), Barrett y Halvorson (2016, 564) y Mceldowney (2019, 7), como en el libro Halvorson (2019), se añade a la definición de Morita-extensión que ya hemos visto en 4.4.2 la siguiente condición:

- Si δ_{σ^+} es una sort definición de $\sigma^+ \in Sort^+ \setminus Sort$, conforme definimos en 4.4.1, y δ_{ρ^+} una definición explícita, conforme quedó definida en 4.3.1, de un $\rho^+ \in Oper.Sym^+ \setminus Oper.Sym$ que se utiliza dentro de δ_{σ^+}, entonces ocurre que

$$\delta_{\sigma^+} = \delta_{\rho^+}$$

En nuestra definición de Morita-extensión no hemos incluido esta condición por dos razones:

- La notación empleada, afirmando que $\delta_{\sigma^+} = \delta_{\rho^+}$ parece inducir a malentendidos, ya que en varios de los ejemplos expuestos dichos escritos no parece cumplirse una igualdad, como tal, entre sentencias. Así, pensamos que, en realidad, este signo de igualdad se refería a la equivalencia lógica de las dos sentencias δ_{σ^+} y δ_{ρ^+}; pero esto tampoco parecía ocurrir siempre. Finalmente, pensamos que se estaba simplemente indicando que se consideraban iguales la definición explícita δ_{ρ^+} y la sort definición δ_{σ^+}.
- La definición explícita δ_{ρ^+} ya está omitida la definición que aparece en los textos de nuestra bibliografía: nada nos impide probar una nueva definición de Morita-extensión (la que ya hemos enunciado en 4.4.2) y ver qué ocurría en los ejemplos y casos prácticos que se nos ocurrieran.

Ejemplo 4. Consideremos el ejemplo que aparece en Barrett y Halvorson (2016, 565) en el que tenemos la siguiente signatura

$$\Sigma = \langle \langle 0, \sigma \rangle, \langle p \rangle, Rank \rangle$$

donde

$$Rank(p) = \langle 0, \sigma \rangle$$

y una extensión de esta

$$\Sigma^+ = \langle \langle 0, \sigma, \sigma^+ \rangle, \langle p, i \rangle, Rank^+ \rangle$$

donde

$$Rank^+(i) = \langle \sigma, \sigma^+ \rangle$$

Si tomamos la siguiente $\Sigma-$teoría

$$Th := \{\exists x_\sigma p(x_\sigma)\}$$

y la definición explícita, δ_{σ^+}, de σ^+ como subuniverso por medio de i, según hemos visto en 4.4.1,

$$\delta_{\sigma^+} = \forall x_\sigma \left(\exists z_{\sigma^+} (i^{\Sigma^+}(z_{\sigma^+}) = x_\sigma \leftrightarrow p^{\Sigma^+}(x_\sigma))\right) \wedge \\ \forall z_{1_{\sigma^+}} \forall z_{2_{\sigma^+}} \left(i^{\Sigma^+}(z_{1_{\sigma^+}}) = i^{\Sigma^+}(z_{2_{\sigma^+}}) \rightarrow z_{1_{\sigma^+}} = z_{2_{\sigma^+}}\right)$$

Por otra parte, tenemos que, según vimos en 4.3.1, una definición explícita de i en función de Σ es una Σ^+-fórmula

$$\delta_i = \forall x_\sigma \forall z_{\sigma^+} \left(i^{\Sigma^+}(z_{\sigma^+}) = x_\sigma \leftrightarrow \phi(x_\sigma)\right)$$

siendo ϕ una cierta Σ-fórmula.

Así,

$$Th^+ = Th \cup \{\delta_{\sigma^+}\}$$

es una Morita-extensión de Th según hemos definido en 4.4.2.

Según la definición de Morita-extensión que aparece en los textos de la bibliografía, habría de ocurrir que

$$\delta_i = \delta_{\sigma^+}$$

Esto es imposible por la naturaleza de Σ-fórmula de la formula ϕ situada dentro de δ_i.

Si tomamos una nueva signatura extensión

$$\Sigma^+ = \langle \langle 0, \sigma, \sigma^+ \rangle, \langle p, q, i \rangle, Rank^+ \rangle$$

donde $q \in Oper.Sym^+ \smallsetminus Oper.Sym$ no apareciera de ninguna manera en δ_{σ^+}, sí tendríamos que

$$Th_2^+ = Th \cup \{\delta_{\sigma^+}\} \cup \{\delta_q\}$$

sería también Morita-extensión de Th.

4.4.4. Un teoría semántico para con las Morita-extensiones

Definición 17. Dadas una Σ-teoría Th y una Σ^+-teoría Th^+ extensión definicional o Morita de la primera, decimos que se trata de una **extensión conservativa** si para cada $\Sigma-$sentencia δ ocurre que

$$Th \vDash \delta \text{ si y solo si } Th^+ \vDash \delta$$

Teorema 2. Cada Morita-extensión es conservativa.

Demostración. La demostración se puede consultar en (Barrett y Halvorson, 2016, 567). □

Así pues, como cada extensión definicional es, en particular, una Morita-extensión que no añade ninguna sort-definición, se nos presenta automaticamente este corolario:

Corolario 1. Cada extensión definicional es conservativa.

4.4.5. Morita-equivalencia de dos teorías

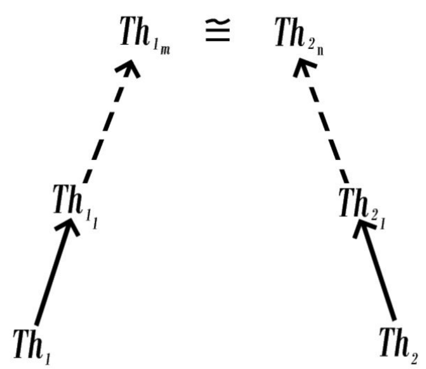
Al igual que consideramos el concepto de equivalencia definicional de dos teorías en 4.3.3, en el que no era necesario compartir signatura para ser definicionalmente equivalente, tenemos el concepto análogo para con las Morita-extensiones:

Definición 18. Sean Σ_1 y Σ_2 dos signaturas y Th_1, Th_2 dos Σ_1 y Σ_2-teorías, respectivamente, cualesquiera. Th_1 y Th_2 serán **Morita-equivalentes** si existen:

- Para un cierto $n \in \mathbb{N}$, una sucesión $(\Sigma_{1_k})_{k=1}^{m}$ de signaturas extensión entre sí de tal forma que
$$\Sigma_1 \subseteq \Sigma_{1_1} \subseteq \ldots \subseteq \Sigma_{1_m}$$
y una sucesión $(Th_{1_k})_{k=1}^{m}$ de Morita-extensiones consecutivas
$$Th_1 \subseteq Th_{1_1} \subseteq \ldots \subseteq Th_{1_m}$$
de tal forma que cada Th_{1_k} es una Σ_{1_k}-teoría para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$.

- Para un cierto $m \in \mathbb{N}$, una sucesión $(\Sigma_{2_h})_{h=1}^{n}$ de signaturas extensión entre sí de tal forma que
$$\Sigma_2 \subseteq \Sigma_{2_1} \subseteq \ldots \subseteq \Sigma_{2_n}$$
y una sucesión $(Th_{1_h})_{h=1}^{n}$ de Morita-extensiones consecutivas
$$Th_2 \subseteq Th_{2_1} \subseteq \ldots \subseteq Th_{2_n}$$
de tal forma que cada Th_{2_h} es una Σ_{2_h} para todo $h \in \{1, \ldots, m\}$.

y, además, la Σ_{1_n}-teorías Th_{1_m} y la Σ_{2_m}-teorías y Th_{2_n}, respectivamente, son lógicamente equivalentes bajo una cierta signatura Σ para la que ocurre que $\Sigma_{1_n} \cup \Sigma_{2_m} \subseteq \Sigma$.



Nota 2. Conviene destacar en este punto la razón de incluir las sucesiones de signaturas y las sucesiones de Moritas-extensiones en la definición de Morita-equivalencia 18 ¿Por qué no afirmar que dos teorías son Morita-equivalentes si existe una Morita-extensión común a las dos? Simplemente, porque ser Morita-extensión no es una propiedad transitiva, como sí lo era ser definicionalmente equivalente[47]. Es decir, si $Th_1 \subseteq Th_2 \subseteq Th_3$ son dos Morita-extensiones, no tiene por qué serlo las teorías Th_1 y Th_3 entre sí. De ahí la necesidad de considerar las sucesiones: dos teorías Morita-equivalentes no tienen por qué tener una Morita-extensión en común. Veámoslo reflejado en el siguiente ejemplo adaptado de Barrett y Halvorson (2017):

[47]Precisamente por eso, en la definición de equivalencia definicional no es necesario tomar las sucesiones que sí tomamos en la de Morita-equivalencia.

Ejemplo 5. Consideremos las siguientes tres signaturas:

$$\Sigma_1 = \langle \{0, \sigma_1, \eta_1\}, \{c\}, Rank_1 \rangle$$

con $Rank_1(c) = \langle \sigma_1 \rangle$

$$\Sigma_2 = \langle \{0, \sigma_1, \sigma_2, \eta_2\}, \{c, j\}, Rank_2 \rangle$$

con $Rank_2(c) = Rank_1(c)$ y $Rank_2(j) = \langle \sigma_1, \sigma_2 \rangle$

$$\Sigma_3 = \langle \{0, \sigma_1, \sigma_2, \eta_2\}, \{c, d, j\}, Rank_3 \rangle$$

con con $Rank_3(c) = Rank_1(c)$, $Rank_3(j) = Rank_2(j)$ y $Rank_3(d) = \langle \sigma_2 \rangle$

y las siguientes Σ_1, Σ_2 y Σ_3−teorías:

$$Th_1 = \varnothing$$

$$Th_2 = \{(\forall x_{\sigma_1} (x = c \leftrightarrow \exists x_{\sigma_2}(j(x_{\sigma_2}) = x_{\sigma_1}))) \wedge Iny(j)\}$$

$$Th_3 = Th_2 \cup \{\forall x_{\sigma_2} (x_{\sigma_2} = d \leftrightarrow j(x_{\sigma_2}) = c)\}$$

Así

a) $Th_1 \subseteq Th_2$ es una Morita extensión, ya que la única sentencia de Th_2 es una sort-definición $\delta_{\varrho 2}$ por medio de la función j.

b) $Th_2 \subseteq Th_3$ es una Morita extensión, ya que añade una única sentencia δ_d que es definición explícita de d como constante no lógica.

c) $Th_1 \subseteq Th_3$ no es una Morita-extensión, ya que la fórmula

$$j(x_{\sigma_2}) = c$$

no es una Σ_1−fórmula y, por tanto, la segunda sentencia de Th_3 no es ninguna definición explícita de d en términos de Σ_1.

Finalmente, queda mencionar que si tenemos en cuenta el teorema 2, que nos indica de qué manera se mantiene el significado de las sentencias de las teorías en una Morita-extensión, podemos concluir que dos teorías que son Morita-equivalentes tienen la propiedad de desembocar, tomando varias veces Morita-extensiones, en una teoría que las contiene como conjunto y que aúna las propiedades semánticas sobre cualquier fórmula de sendas teorías originales.

4.5. Conclusión

Varias han sido las metas alcanzadas en este texto. En primer lugar, hemos aplicado la Lógica multivariada de primer orden que aparece en Manzano (1996) para mejorar y hacer más precisa la manipulación de los conceptos de ésta con el objeto de poder definir y clarificar los conceptos que nos han ocupado. Si bien hemos rediseñado una pequeña parte de la notación, como, por ejemplo, hacer la distinción de las grafías de símbolos operacionales, ρ, su interpretación bajo una cierta signatura Σ, ρ^{Σ}, y su interpretación en una Σ-estructura, $\rho^{\mathcal{A}}$; o considerar las signatura como 3-tuplas y separar en las dos primeras posiciones de estas los símbolos destinados a indexar universos y los operacionales; hemos aplicado la Lógica multivariada de primer orden conforme aparece en el libro Manzano (1996) y no conforme aparece en los artículos Barrett y Halvorson (2016), Barrett y Halvorson (2017) y Mceldowney (2019). Otra de las metas alcanzadas es la de unas definiciones de Morita-extensión y Morita-equivalencia acordes con los mismos ejemplos que aparecen en los mismos artículos de nuestra bibliografía.
Como trabajo futuro quedan, entre otros, el de la formalización de crear nuevos tipos de sort-definiciones, aparte de los cuatro ya existentes y vistos en 4.4.1 de cara a crear nuevas Morita-extensiones, y el de mejorar la presentación que aparece en Barrett y Halvorson (2017) de un teorema que demuestre la existencia de una teoría univalorada[48] morita-equivalente a cualquier teoría multivalorada dada.
Por último, mencionar que muchos de los avances que presenta este texto no hubieran sido posibles sin la colaboración del doctor de la Universidad Autónoma de Madrid Víctor Aranda Utrero.

Bibliografía

Barrett, T. W. y Halvorson, H. (2016). Morita equivalence. *The Review of Symbolic Logic*, 9(3):556–582.

Barrett, T. W. y Halvorson, H. (2017). Quine's conjecture on many-sorted logic. *Synthese*, 194(9):3563–3582.

Halvorson, H. (2019). *The Logic in Philosophy of Science*. Cambridge: Cambridge University Press.

Hodges, W. (1993). *Model Theory*. Cambridge: Cambridge University Press.

Manzano, M. (1996). *Extensions of first-order logic*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mceldowney, P. A. (2019). On morita equivalence and interpretability. *The Review of Symbolic Logic*, pages 1–28.

[48]Bajo una signatura que permita un solo universo aparte de el de valores de verdad.